

PAȘI SPRE SUCCES

LITERA

Bacalaureat Admitere

în Facultăți și Universități

COSTEL-DOBRE CHITEȘ (coordonator)
VLAD FLORENTIN DRINCEANU
DANIEL PETRICEANU

MATEMATICĂ

M2

CONȚINUTURI TEORETICE
TESTE ȘI SUGESTII DE REZOLVARE

CUPRINS

Cuvânt-înainte	3
----------------------	---

CLASA A IX-A

Mulțimi de numere	7
Elemente de logică matematică	11
Elemente de teoria mulțimilor	13
Inducția matematică	16
Șiruri de numere reale	21
Progresii aritmetice. Progresii geometrice	23
Funcții numerice. Funcția de gradul întâi	26
Funcția de gradul al doilea	36
Vectori în plan. Paralelism	43
Aplicații ale calculului vectorial în geometrie	49
Elemente de trigonometrie	52

CLASA A X-A

Funcții. Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate	67
Funcția putere, funcția radical	74
Ecuții iraționale	79
Funcția exponențială. Funcția logaritmică	80
Numere complexe	84
Forma trigonometrică	90
Funcții trigonometrice inverse	95
Ecuții trigonometrice	97
Probleme de numărare	99
Formula binomului lui Newton	102
Matematici financiare. Procente, dobânzi, T.V.A.	104
Interpretarea datelor statistice prin parametrii de poziție: medii	105
Elemente de teoria probabilităților	106
Coordonate carteziane în plan	110
Ecuția dreptei în plan	113

CLASA A XI-A

Noțiuni preliminare	117
Matrice	118
Determinanți	125
Aplicații ale determinanților	128

Rangul unei matrice. Matrice inversabilă	129
Sisteme liniare	131
Elemente de analiză matematică	133
Limite de funcții. Funcții continue	137
Funcții derivabile	142

CLASA A XII-A

Noțiuni preliminare	155
Lege de compoziție. Proprietăți	159
Grupuri	164
Morfisme și izomorfisme de grupuri	172
Inele	174
Corpuri	178
Inele de polinoame	180
Polinoame cu coeficienți complecși	188
Funcții care admit primitive. Funcții integrabile	194

TESTE FINALE	201
--------------------	-----

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	213
-------------------------------	-----

CUVÂNT-ÎNAINTE

Prezenta lucrare a fost concepută în conformitate cu programa școlară în vigoare pentru examenul de Bacalaureat, proba Matematică M2, folosindu-se notații și formulări adecvate.

Lucrarea se constituie într-un ghid de pregătire continuă de-a lungul anilor de liceu și este structurată astfel:

- Clasa a IX-a – Algebră/Geometrie
- Clasa a X-a – Algebră/Geometrie
- Clasa a XI-a – Algebră/Analiză matematică
- Clasa a XII-a – Algebră/Analiză matematică

Fiecare temă din programa pentru Bacalaureat debutează cu o secțiune teoretică cuprinzând noțiuni esențiale, fiind urmată de exerciții și probleme. Au fost introduse numeroase probleme de tip exemple – contraexemple, care solicită atât verificarea unei bune asimilări a teoriei, cât și cunoașterea unui număr important de probleme standard.

Parcurgerea acestui auxiliar în mod sistematic, cu seriozitate și perseverență, garantează o excelentă pregătire la disciplina *Matematică*, reușita la susținerea examenului de Bacalaureat, proba M2, cât și la admiterea în facultăți și universități.

Testele propuse, elaborate după modelul subiectelor date la Bacalaureat conform specificațiilor și programei de examen în vigoare, permit verificarea stadiului pregătirii.

Ultima parte a lucrării oferă soluții la exercițiile propuse și indicații de rezolvare.

Lucrarea poate servi ca un instrument eficient în evaluarea la clasă, pe tot parcursul anilor de liceu.

Autorii, profesori cunoscuți pentru bogata lor activitate și pentru rezultatele excepționale obținute de elevii pe care aceștia i-au pregătit, vă recomandă călduros acest auxiliar și vă urează mult succes!

CLASA a IX-a

MULȚIMI DE NUMERE

- Reamintim mulțimile de numere:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$, mulțimea numerelor naturale (\mathbb{N} de la inițiala cuvântului *naturel* (fr.) = „natural”);

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$ (\mathbb{Z} de la inițiala cuvântului *Zahl* (germ.) = „număr”. Consacrarea notației s-a realizat în semn de respect pentru matematicianul german C.F. Gauss.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*, (a, b) = 1 \right\}$, mulțimea numerelor raționale

(\mathbb{Q} de la cuvântul *quotient* (fr.) = „cât”);

\mathbb{R} = mulțimea numerelor reale (\mathbb{R} de la inițiala cuvântului *réel* (fr.) = „real”).

- Karl Weierstrass introduce numerele reale ca fracții zecimale infinite.

Pentru $a_0 \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, \forall k \in \mathbb{N}^*$, numărul $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ care este neperiodic sau este periodic (cu perioada diferită de 9) se numește *număr real*.

- Dacă $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ și $y = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ sunt două numere reale, atunci $x = y \Leftrightarrow a_k = b_k, \forall k \in \mathbb{N}$.

- Dacă $a_0 \in \mathbb{N}$ numărul real x se numește *pozitiv* și $-x$ se numește *negativ*. Pentru $x, y \in \mathbb{R}_+$, vom spune că $x < y$ dacă $\exists m \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_k = b_k, \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}, a_m < b_m$.

- Dacă $x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}_+$, atunci $x < y$. Dacă $x, y \in \mathbb{R}_-$, atunci $x < y \Leftrightarrow -y < -x$, unde $-x, -y$ se compară ca numere pozitive.

- Vom spune că $x \leq y$ dacă $x < y$ sau $x = y$.

- Numărul $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ este aproximarea numărului x prin lipsă cu o eroare mai mică decât 10^{-n} .

Numărul $\beta = \alpha + 10^{-n}$ reprezintă aproximarea numărului x prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-n} .

- Dacă $x = 0, a_1 a_2 \dots a_p \left(a_{p+1} a_{p+2} \dots a_{p+k} \right)$, atunci $x \in \mathbb{Q}$ și

$$x = \frac{a_1 a_2 \dots a_{p+k} - a_1 a_2 \dots a_p}{\underbrace{99 \dots 900 \dots 0}_{\substack{\text{de } k \text{ ori} \quad \text{de } p \text{ ori}}}}$$

- Dacă $x \in \mathbb{Q}$, atunci x reprezentat ca număr zecimal este finit sau periodic. Numerele reale neperiodice sunt numere iraționale.

- Scrieți ca fracții ordinare următoarele fracții zecimale: 0,(3); 0,(23); 0,12(35).
 - Scrieți ca număr zecimal fracția ordinară $\frac{1}{7}$.
- Se consideră numărul real pozitiv $\alpha = 27,4139\dots$. Determinați truncherile acestuia de ordin 0, 1, 2, 3.
- Stabiliți dacă numărul $x = 0,1211211121112\dots$ (după fiecare cifră de 2 numărul de cifre de 1 crește cu o unitate față de grupa precedentă) este:
 - rațional;
 - irațional.
- Notăm $Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$, $Q(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}$.
 - Este adevărată afirmația $\sqrt{3} \in Q(\sqrt{2})$?
 - Determinați $Q(\sqrt{2}) \cap Q(\sqrt{3})$.

Fie $x \in \mathbb{R}$.

- $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, se numește *modulul* numărului x .
- $[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$, adică cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x se numește *partea întreagă* a lui x .
Pentru $k \in \mathbb{Z}$ are loc echivalența: $[x] = k \Leftrightarrow x \in [k, k+1)$
- $\{x\} = x - [x]$, se numește *partea fracționară* a numărului x .
Deducem că $\{x\} \in [0, 1)$.

- Arătați că:
 - $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, unde $a \in \mathbb{R}_+$;
 - $-|x| \leq x \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
 - $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}; |x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}; ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- Determinați: $a = |-3|$, $b = |7|$, $c = |1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}|$, $d = |1 + \sqrt{2} - \sqrt{10}|$.
- Pentru diferite valori reale ale variabilelor, explicitați:
 - $|a + b| - |b|$;
 - $|x| - 1$;
 - $|x| - |x^2|$;
 - $a - |a - |a||$.
- Determinați toate numerele reale x pentru care au loc:
 - $|x - 3| = 8$
 - $|x - 3| < 8$
 - $|x + 4| < 2$
 - $|x - 1| + |x - 2| > 1$
 - $|x - 1| + |x + 1| < 2$.
- Unde este greșeala în următoarea „demonstrație”?
„Fie $x = y$. Atunci: $x^2 = xy$, $x^2 - y^2 = xy - y^2$, $(x - y)(x + y) = y(x - y)$, $x + y = y$, $2y = y$, $2 = 1$.”

- Calculați $[x]$ și respectiv $\{x\}$ pentru numerele:
 - $x = 0,2$;
 - $x = \pi$;
 - $x = -\pi$;
 - $x = 1 + \sqrt{2}$;
 - $0,(9)$.
- Rezolvați în \mathbb{R} ecuațiile:
 - $\left[5x - \frac{1}{3}\right] = -7$;
 - $\left[\frac{x+2}{3}\right] = \frac{x+1}{2}$.
- Pentru oricare $x \in \mathbb{R}$ au loc egalitățile:
 - $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$ (Identitatea lui Hermite pentru $n = 2$);
 - $\{x\} + \left\{x + \frac{1}{2}\right\} = \{2x\} + \frac{1}{2}$.
- Fie $y \in \mathbb{R}$. Atunci are loc identitatea lui Hermite pentru $n = 3$:
 $[y] + \left[y + \frac{1}{3}\right] + \left[y + \frac{2}{3}\right] = [3y]$;
 - Rezolvați în \mathbb{R} ecuația: $\left[\frac{2x+1}{3x+7}\right] + \left[\frac{9x+10}{9x+21}\right] + \left[\frac{12x+17}{9x+21}\right] = 10$.
- Demonstrați:
 - $\sqrt{2} \notin Q$;
 - $\sqrt{3} \notin Q$;
 - $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin Q$;
 - $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \notin Q$.
- Se consideră numărul $A = 11^{21} + 14^{21}$. Cercetați care dintre afirmații este adevărată:
 - $A \div 5$;
 - $A \div 10$.

Pentru $a, b \in \mathbb{R}$ prin utilizarea proprietăților operațiilor cu numere reale se deduc identitățile: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a + b)^n$ pentru $n \in \mathbb{N}$ cu ajutorul triunghiului lui Pascal:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1
 \end{array}$$

Binomul pentru $n = 2$ era cunoscut încă din Antichitate. Euclid (sec. III î.Hr.) îl utilizează în lucrarea sa *Elemente*. Matematicienii chinezi din secolul al XIV-lea, de exemplu, Ciju Și Tze (1303), sau matematicienii persani Omar Khayyam și Al-Tusi cunoșteau regula de formare a coeficienților binomiali. De la ei au rămas dezvoltările scrise până la $n = 8$. În prima jumătate a secolului al XV-lea, în lucrarea *Cheia aritmeticii*, matematicianul și astronomul al-Kashi utilizează din nou triunghiul aritmetic. Mai târziu, a fost generalizată de către Blaise Pascal și Isaac Newton.

• Formule de calcul prescurtat în \mathbb{R} :

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2; (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

- Pentru $a, b \in \mathbb{R}$ și $n, k \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ se deduc identitățile:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a + b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \dots - ab^{2k-1} + b^{2k})$$

- Simbolurile \sum și \prod

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ și $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ se definesc:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{k=1}^n a_k$$

- Pentru $t \in \mathbb{R}$, $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ au loc egalitățile:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \quad \sum_{k=1}^n t \cdot a_k = t \cdot \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\prod_{k=1}^n a_k \cdot b_k = \prod_{k=1}^n a_k \cdot \prod_{k=1}^n b_k, \quad \prod_{k=1}^n t \cdot a_k = t^n \cdot \prod_{k=1}^n a_k$$

16. Dezvoltați următoarele binoame cu ajutorul formulelor date mai sus:

a) $(a + b)^3$, $(a + b)^4$, $(a + b)^5$ b) $(2x + 1)^3$, $(3x + 2)^4$, $(2x + 3)^5$

c) $(a - b)^3$, $(a - b)^4$, $(a - b)^5$ d) $(2x - 1)^3$, $(3x - 2)^4$, $(2x - 3)^5$

17. Fie $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm cu $S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$.

Calculați sumele: $S_0(n)$, $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$.

18. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, calculați sumele:

a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$; b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + (2n - 1)2n(2n + 1)$;

c) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n - 2)(3n + 1)}$.

19. Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, calculați produsul:

$$P = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8) \cdot \dots \cdot (1 + a^{2^n}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

20. Calculați următoarele produse:

a) $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$; b) $\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$.

21. Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$, demonstrați identitățile:

a) $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$;

b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.

22. Calculați suma: $S_4(n) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

23. Calculați sumele:

a) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$; b) $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{4k^2 - 1}$.

24. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a.î. $a + b + c \in \mathbb{Q}$, $a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{Q}$, atunci are loc echivalența: $a^3 + b^3 + c^3 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow abc \in \mathbb{Q}$.

25. a) Arătați că pentru $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ are loc inegalitatea: $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

b) Arătați că pentru oricare $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ are loc inegalitatea $\sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} \leq \frac{x + y + z}{3}$.

26. a) Dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $6|a + b + c \Rightarrow 6|a^3 + b^3 + c^3$.

- b) Dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $9|a + b + c$, atunci cel puțin unul dintre numerele a, b, c se divide cu 3.

27. Dacă $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ a. î. $2^m + 1 = \text{prim}$, atunci există $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $m = 2^k$.

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

- Multe din axiomele, definițiile și teoremele din matematică utilizează cuantificatorii: *existențial* (\exists) sau *universal* (\forall).

- Sunt două modalități de a crea alte propoziții plecând de la cele date.

1) Transformând o propoziție p în negația sa $\neg p$ (se citește **non p**);

2) Combinând mai multe propoziții prin utilizarea conectorilor logici:

a) conjuncția (notată \wedge , se citește **și**);

b) disjuncția (notată \vee , se citește **sau**);

c) implicația (notată \rightarrow , se citește **implică**);

d) echivalența (notată \leftrightarrow , se citește **echivalent**).

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

28. Determinați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $\exists x \in \mathbb{Z}$ a.î. $2x + 7 = 0$;

d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x - 2| + |x - 10| \geq 8$;

b) $\exists y \in \mathbb{Q}$ a.î. $2y + 7 = 0$;

e) 1739 este număr prim;

c) $\forall x \in \mathbb{Z}^*$, $x^2 \geq 1$;

f) $\alpha = 0, (1) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

29. Completați următoarele texte:

a) „Cornel susține că toate problemele propuse la extemporal au fost dificile. Andrei susține că Bogdan nu are dreptate, deoarece ...”

b) Negația enunțului „Există elevi ai clasei a IX-a B care iubesc muzica rock” este ...

- O funcție $f: A \rightarrow B$ este *injectivă* dacă: $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Remarcă

Prin negare obținem:

O funcție $f: A \rightarrow B$ nu este injectivă dacă $\exists x_1 \in A, \exists x_2 \in A$ cu $x_1 \neq x_2$ a.î. $f(x_1) = f(x_2)$.

Propoziție

- Fiind dată o funcție $f: A \rightarrow B$, au loc echivalențele:
 - f este injectivă;
 - dacă $x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;
 - $\forall y \in B$ ecuația în $f(x) = y$ are cel mult o soluție $x \in A$.
 (Dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}$, atunci orice paralelă la axa OX prin punctele $y \in B$ taie graficul G_f în cel mult un punct.)

Propoziție

- Dacă $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}, I_1 \cap I_2 = \emptyset$ și $f: I_1 \cup I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție, atunci are loc echivalența: f este injectivă $\Leftrightarrow \begin{cases} f|_{I_1} \text{ este injectivă} \\ f|_{I_2} \text{ este injectivă} \\ f(I_1) \cap f(I_2) = \emptyset \end{cases}$
- O funcție $f: A \rightarrow B$ se numește *surjectivă* dacă pentru oricare $y \in B$ există $x \in A$ pentru care $y = f(x)$.
Astfel, putem considera echivalența: f este surjectivă $\Leftrightarrow [\forall y \in B$ ecuația în $f(x) = y$ are cel puțin o soluție $x \in A]$. Determinarea lui x se realizează efectiv sau prin utilizarea unei teoreme de tip existențial.
(Dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}$, atunci orice paralelă la axa OX prin punctele $y \in B$ taie graficul G_f în cel puțin un punct.)

Remarcă

$f: A \rightarrow B$ este surjectivă $\Leftrightarrow \text{Im } f = B$. Amintim că „sur” în limba franceză se traduce prin „pe”. Din acest motiv, acum o jumătate de secol, o funcție surjectivă se numea funcție definită pe A cu valori pe B .

- O funcție este *bijectivă* dacă și numai dacă este injectivă și surjectivă.
Deci $f: A \rightarrow B$ este bijectivă $\Leftrightarrow [\forall y \in B \exists! x \in A \text{ a. î. } y = f(x)]$.
- O funcție $f: A \rightarrow B$ este *inversabilă* dacă există $g: B \rightarrow A$ a.î. $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.

Propoziție

- O funcție cu proprietățile precedente, dacă există, este unică, se numește *inversa* funcției f și se notează $g = f^{-1}$.

Propoziție

- O funcție este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă.

Propoziție

- Pentru funcțiile $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ și compusa $A \xrightarrow{g \circ f} C$, au loc afirmațiile:
 - Dacă f și g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă.
 - Dacă f și g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă.
 - Dacă f și g sunt bijective, atunci $g \circ f$ este bijectivă.
- Dacă f și g sunt bijective, are loc egalitatea: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Fiind date două mulțimi A și B spunem că A este *cardinal echivalentă* cu B și notăm $A \sim B$ dacă există o funcție $f: A \rightarrow B$ bijectivă.
- Pe clasa funcțiilor, relația de cardinal echivalentă \sim este o relație de echivalență (reflexivă, simetrică și tranzitivă).
- O mulțime A este *finită* dacă $A = \emptyset$ sau, dacă $A \neq \emptyset$, atunci există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$. În caz contrar, A se numește *infinită*.
- Fiind dată o mulțime A , definim $|A| = \{B \mid B \sim A\}$ cardinalul mulțimii A .
- O mulțime $B \sim \mathbb{N}$ se numește *numărabilă*.
- Pentru mulțimile finite, cardinalele lor sunt numere naturale. Pentru mulțimile infinite, cardinalele lor sunt *numere transfinită*.
- De exemplu: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ (alef 0) sunt numărabile, iar $|\mathbb{R}| = c$, de puterea continuului. O mulțime finită sau numărabilă se numește *cel mult numărabilă*.

Remarcă

Meritul lui Georg Cantor este că s-a hazardat în domeniul mulțimilor infinite și a creat o nouă teorie matematică.

Teorema Cantor-Bernstein

Se consideră două mulțimi A și B . Dacă fiecare dintre ele este cardinal echivalentă cu o submulțime a celeilalte, atunci mulțimile sunt cardinal echivalente.

Teorema lui Cantor

Dacă A este o mulțime arbitrară, atunci nu există bijecție între A și mulțimea submulțimilor sale $P(A)$.

1. Studiați injectivitatea funcțiilor:
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3, \forall x \in \mathbb{R};$
 - $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R};$
 - $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = ax^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R};$
 - $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^5 - 4x^3 + 7, \forall x \in \mathbb{R}.$
2. a) Dacă $A \subseteq \mathbb{R}, f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este strict monotonă, atunci f este injectivă. Reciproca este adevărată?
 b) Studiați injectivitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5 + 4x^3 + 1.$
 c) Dacă f și g sunt funcții strict crescătoare (descrescătoare), atunci $f + g$ este o funcție strict crescătoare (descrescătoare).
3. Studiați injectivitatea funcției:
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 0 \\ 3x + a, & x > 0 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}.$
4. Se consideră funcțiile $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ și $A \xrightarrow{g \circ f} C.$
- Demonstrați că următoarele afirmații sunt adevărate.
 - Dacă f și g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă.
 - Dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă.
 - Este adevărată implicația: $g \circ f$ injectivă $\Rightarrow f$ injectivă și g injectivă?
5. Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție. Demonstrați că are loc echivalența:
 f este injectivă $\Leftrightarrow \exists r: B \rightarrow A$ astfel încât $r \circ f = 1_A.$
 r se numește *retractă* (inversă la stânga) a lui $f; r$ nu este, în general, unică.
6. Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție. Demonstrați că are loc echivalența:
 f este surjectivă $\Leftrightarrow \exists s: B \rightarrow A$ astfel încât $f \circ s = 1_B.$
 s se numește *secțiune* (inversă la dreapta) a lui $f; s$ nu este, în general, unică.
7. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -2x + a, & x > 0 \end{cases}$ este:
- surjectivă;
 - bijectivă. În acest caz aflați inversa $f^{-1}.$
8. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{4, 5\}.$
- Se poate construi o funcție injectivă $f: A \rightarrow B?$
 - Se poate construi o funcție surjectivă $g: B \rightarrow A?$
 - Câte funcții injective $h: B \rightarrow A$ există?
 - Câte funcții surjective $s: A \rightarrow B$ există?
9. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care verifică relația funcțională $f(f(x)) = -5x + 1,$
 $\forall x \in \mathbb{R}.$ Arătați că f este bijectivă.
10. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1.$
- Arătați că f este injectivă.
 - Arătați că f este surjectivă.
 - Arătați că f este inversabilă și calculați $f^{-1}.$
11. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 1$ nu este injectivă. Determinați o restricție injectivă a lui $f.$
12. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 0 \\ 5x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$
- Arătați că f este funcție injectivă și determinați o funcție $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $r \circ f = 1_{\mathbb{R}}.$ Această funcție r nu este unică.
13. a) Stabiliți care dintre următoarele funcții sunt injective:
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1;$
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R};$
 - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 2| + |4 - x|.$
- b) Pentru oricare $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ nu este injectivă. Dați exemple de restricții ale lui f ce sunt injective. Câte există?
14. Arătați:
- Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 5$ este surjectivă. Verificați că preimaginea elementului y este $x = \frac{y - 5}{3}.$
 - Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 17x - 5$ este surjectivă. Preimaginea elementului y este asigurată de o teoremă cunoscută din cadrul polinoamelor ce au coeficienți reali, pe care se cere să o enunțați.

Remarcă

Determinarea preimaginii x a lui y se realizează: *efectiv*, adică prin determinarea sa, ca formulă, sau prin utilizarea unei *teoreme de existență*, care o asigură.

15. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 0 \\ 5x^2 - 2, & x > 0 \end{cases}$
- Arătați că f este funcție surjectivă și determinați o funcție $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f \circ s = 1_{\mathbb{R}}.$
16. Construiți o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f \neq 1_{\mathbb{R}}, f \circ f \neq 1_{\mathbb{R}}, f \circ f \circ f = 1_{\mathbb{R}}.$
17. Se consideră funcția $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{1}{x}, \forall x \geq 1.$
- Arătați că f este injectivă pentru oricare $B \supseteq [2, \infty).$

- O soluție a sistemului (1) este un n -uplu (vector de dimensiune n): $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ care verifică toate ecuațiile sistemului. Mulțimea tuturor soluțiilor sistemului (1) se numește *mulțimea soluțiilor*.
- Două sisteme liniare sunt *echivalente* dacă au aceeași mulțime a soluțiilor.
- Informații importante asupra unui sistem liniar sunt date de *matricea sistemului*, respectiv *matricea extinsă* a sa.

MATRICE

- Se consideră R una dintre mulțimile $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ fixate; atunci o funcție $f: \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow R$, $(i, j) \rightarrow f(i, j) = a_{ij} \in R$ se numește *matrice de tip $m \times n$* cu elemente în R . Mulțimea tuturor acestor funcții se notează $\mathcal{M}_{m \times n}(R)$.
- Pentru sistemul (1), $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se numește *matricea sistemului* și $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ se numește *matricea extinsă*.
- Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$, atunci $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ (fiind egalitate de funcții).
- Se introduc operațiile de adunare, înmulțire cu scalari pe mulțimea $\mathcal{M}_{m \times n}(R)$. Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$, atunci $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$ se numește suma matricelor A și B . Se verifică următoarele proprietăți:
 - $(A + B) + C = A + (B + C)$, $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$;
 - Există $0 \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$ a.î. $0 + A = A + 0 = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$. 0 este numită *matricea nulă*.
 - Oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$, $\exists (-A) \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$ a.î. $A + (-A) = (-A) + A = 0$. $-A$ este numită *opusa matricei A* .
 - Oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$, $B + A = A + B$, *adunarea matricelor este comutativă*.
- Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$, $r \in R$, atunci $r \cdot A = (ra_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$. Se verifică proprietățile:
 - $r(A + B) = rA + rB$;
 - $(r + s)A = rA + sA$;
 - $r(sA) = (rs)A$;
 - $1 \cdot A = A$, $\forall r, s \in R, \forall A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$.

- Între anumite matrice se poate defini și o înmulțire. Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$, $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n \times p}(R)$, atunci putem defini matricea $C = A \cdot B = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{m \times p}(R)$, unde $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq p$.

Proprietățile înmulțirii

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$, $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(R)$, $C \in \mathcal{M}_{p \times q}(R)$. (asociativitatea înmulțirii).
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$, $B, C \in \mathcal{M}_{n \times p}(R)$.
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$, $C \in \mathcal{M}_{n \times p}(R)$ (distributivitatea înmulțirii față de adunare).
- Pentru oricare $A \in \mathcal{M}_n(R)$, $\exists I_n \in \mathcal{M}_n(R)$, $I_n = (\delta_{ij})_{i, j \in \{1, \dots, n\}}$ a.î. $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ (existența elementului neutru pentru matricele pătrate).

Remarcă

Se pot înmulți doar matricele pentru care numărul de coloane ale primei matrice coincide cu numărul liniilor ale celei de-a doua matrice. Dacă $m = n$, matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se numește *matrice pătrată* și mulțimea acestora se notează cu $\mathcal{M}_n(R)$.

- Se disting submulțimile: $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Sistemul ordonat $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \in R^n$ este *diagonala principală*, iar sistemul ordonat $(a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}) \in R^n$ este *diagonala secundară* a matricei A .
- Dacă $n = 1$, atunci matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times 1}(R)$ se numește *matrice coloană*, pe care o putem identifica cu un vector de lungime m (ca în informatică).
- Dacă $m = 1$, atunci matricea $B = (b_{11} \ b_{12} \ \dots \ b_{1n}) \in \mathcal{M}_{1 \times n}(R)$ se numește *matrice linie*, pe care o putem identifica cu un vector de lungime n (ca în informatică).

- *Transpusa* matricei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(R)$ este matricea

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(R).$$

Proprietăți

Pentru $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(R), \forall \alpha \in R$ au loc:

- $(A + B)^t = A^t + B^t; (\alpha A)^t = \alpha \cdot A^t; (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t.$
- O matrice pătrată $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(R)$ este *simetrică* dacă $a_{ji} = a_{ij}, \forall i, j \in \overline{1, n}$, adică $A = A^t.$
- O matrice pătrată $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(R)$ este *antisimetrică* dacă $a_{ji} = -a_{ij}, \forall i, j \in \overline{1, n}$, adică $A = -A^t.$
- Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(R)$, numărul $\sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{Tr}(A)$ se numește *urma* matricei A (*trace* = „urmă” în franceză și engleză).

Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(R), \alpha \in R$, atunci au loc afirmațiile:

- $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B);$
- $\text{Tr}(\alpha A) = \alpha \text{Tr}(A);$
- $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA);$
- $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^t).$

Remarcă

Pentru matricea $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ se mai utilizează notațiile $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sau $A = \|a_{ij}\|_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Calculul puterilor

- Pentru $A \in \mathcal{M}_n(R), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, definim $A^n = A^{n-1} \cdot A.$
- Dacă $A, B \in \mathcal{M}_p(R)$ a.î. $A \cdot B = B \cdot A$, atunci au loc:
 - $\forall k, j \in \mathbb{N}^*, A^k \cdot B^j = B^j \cdot A^k;$
 - $\forall n \in \mathbb{N}^*, (A + B)^n = C_n^0 A^n + C_n^1 A^{n-1} B + C_n^2 A^{n-2} B^2 + \dots + C_n^{n-1} A B^{n-1} + C_n^n B^n.$ (*binomul lui Newton*)
- Fie K una dintre mulțimile \mathbb{Q}, \mathbb{R} sau \mathbb{C} . Matricele vor fi considerate cu elemente în $K.$

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 6 \\ 20 & 13 & 110 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{Z}).$ Calculați: $A + B, 5 \cdot A, A - B.$ Putem defini produsul $A \cdot B?$

2. Calculați;

- a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$
- b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix};$
- c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix};$
- d) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$
- e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3;$
- f) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5;$
- g) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n, n \in \mathbb{N}^*;$
- h) $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}^n, n \in \mathbb{N}^*;$
- i) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n, n \in \mathbb{N}^*, a, b \in \mathbb{R}$ date.
- j) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, n \in \mathbb{N}^*;$
- k) $\begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n, n \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{R}$ dat.

3. Calculați $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$, utilizând egalitatea

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$ Determinați toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X = X \cdot A$ (matricele ce comută cu matricea A).
5. Se consideră matricea $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$ Determinați toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $B \cdot X = X \cdot B.$
6. Calculați:

- a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$

- b) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix};$

- c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

- d) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n, n \in \mathbb{N}^*, a, b, c \in \mathbb{R}$ date.

7. Calculați $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^6$ utilizând egalitatea:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix};$$

8. Fie $A = (1 \ -1 \ 4)$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculați AB , BA , $(AB)^2$, $(BA)^2$ (dacă există).

Sunt adevărate egalitățile: $(AB)^2 = A^2 \cdot B^2$, $(BA)^2 = B^2 \cdot A^2$?

9. a) Se consideră polinomul $f(X) = X^2 - 2X + I_2$ și matricea $B = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculați $f(B)$, $f(B + I_2)$.

b) Fiind date matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. Calculați: AB , BA (dacă există).

10. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculați, dacă există:

a) $A - B + 3C$, $-2A + B + 2C$;

b) $A \cdot B^t$, $C^t \cdot A$, $B \cdot A$.

11. a) Determinați $x, y, z \in \mathbb{C}$ pentru care matricele $A = \begin{pmatrix} 3x+4 & 3 \\ y^2-x & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & y \\ 8 & z^3+124 \end{pmatrix}$ sunt egale.

b) Determinați $x, y, z \in \mathbb{R}$ pentru care sunt egale matricele

$$A = \begin{pmatrix} -5x+17 & 3 \\ y^2+x & -1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 22 & y \\ 8 & z^3+124 \end{pmatrix}.$$

12. Se consideră matricele $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k^2 & k^3 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Calculați $\sum_{k=1}^n A_k$.

13. Determinați cardinalul următoarelor mulțimi: $A = \mathcal{M}_{2 \times 3}(\{-1, 1\})$;
 $B \in \mathcal{M}_2(\{-1, 0, 1\})$; $C \in \{\mathcal{M}_{3 \times 2}(\{0, 2, 4\}) \mid A = (a_{ij}), a_{11} + a_{12} = 2\}$.

14. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Determinați matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ a.î. $A \cdot X = X \cdot A$.

15. a) Dacă pentru matricele A și B există AB , BA și $AB = BA$, atunci A și B sunt matrice pătrate de același tip.

b) Rămâne concluzia adevărată dacă renunțăm la condiția 3 din ipoteză?

16. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

a) Calculați $Tr(AB)$, $Tr(BA)$, $Tr(AB - BA)$. Deduceți că nu are loc egalitatea $AB - BA = I_2$.

b) Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci egalitatea $AB - BA = I_n$ este imposibilă.

17. Determinați toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care:

a) $X^2 = 0_2$; b) $X^2 = I_2$; c) $X^2 = X$.

18. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se definesc $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$,
 $A_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$.

a) Descrieți mulțimile pentru $n \in \{2, 3, 4\}$.

Arătați că:

b) $\forall A, B \in S_n(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow A + B \in S_n(\mathbb{R}), \alpha A \in S_n(\mathbb{R})$;

c) $\forall A, B \in A_n(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow A + B \in A_n(\mathbb{R}), \alpha A \in A_n(\mathbb{R})$;

d) $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0_n\}$;

e) $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \exists! A \in S_n(\mathbb{R}), B \in A_n(\mathbb{R})$ a.î. $C = A + B$.

19. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Arătați că există $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $A^k = 0_3$.

b) Calculați $(I_3 + A)^n, n \in \mathbb{N}^*$.

20. Determinați $A^n, n \in \mathbb{N}^*$ pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{C}$, apoi demonstrați prin inducție matematică afirmația.

21. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Rezolvați ecuațiile:

a) $X^n = A, X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$;

b) $Y^n = A, Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

22. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. Calculați $A^n, n \in \mathbb{N}^*$.

23. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Arătați că:

a) dacă A este idempotentă, atunci $2A - I$ este involutivă;

b) dacă A este involutivă, atunci $\frac{1}{2}(A - D)$ este idempotentă.

(A este idempotentă dacă $A^2 = A$; A este involutivă dacă $A^2 = I$.)

24. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$; atunci:

a) $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0_2$;

b) pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$ există $x_n, y_n \in \mathbb{C}$ a.î. $A^n = x_n A + y_n I_2$.